8Д

УДК 004.3

И.А. Дичка, В.В. Жабина
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина
dychka@scs.ntu-kpi.kiev.ua, val_zhabina@mail.ru

Метод вычисления функций в неавтономном режиме

Предложен таблично-алгоритмический метод вычисления функций с использованием смещенных избыточных систем счисления, который позволяет совмещать процессы поразрядного ввода аргумента и поразрядного формирования результата. Это дает возможность использования метода для неавтономного выполнения зависимых по данным операций в режиме совмещения. Показана зависимость времени вычислений от параметров систем счисления.

Введение

При реализации последовательно-параллельных алгоритмов в параллельных вычислительных системах можно выделить последовательность (цепочку) операций (функций), которые нельзя распараллелить ввиду их зависимости по данным. Следующую операцию в цепочке можно начать выполнять только после получения результата предыдущей операции. Аналогичная ситуация возникает при реализации итерационных вычислительных процессов, когда на очередном шаге вычислений используется результат, по крайней мере, одного предыдущего шага.

Для ускорения вычислений в данном случае может быть использован метод неавтономного вычисления цепочки зависимых операций в режиме частичного совмещения. Зависимые операции, принадлежащие критическому пути на графе алгоритма, выполняются в цепочке операционных устройств, между которыми данные передаются поразрядно [1]. В каждом устройстве реализован метод выполнения операции, позволяющий на каждом шаге совмещать во времени ввод операндов, их обработку и выдачу одного разряда результата в следующее устройство. При таком режиме вычислений следующая операция начинает выполняться сразу после получения первого разряда предыдущей операции. За счет этого обеспечивается частичное совмещение зависимых операций, что создает предпосылки для ускорения вычислений [2].

Современные методы проектирования вычислительных систем на основе ПЛИС дают возможность на одной микросхеме создавать композицию устройств переработки информации, позволяющую выполнять одновременно операции над многими операндами. Эффективность использования ресурсов ПЛИС во многом зависит от способов обмена данными между компонентами системы. Последовательная передача данных между компонентами сокращает необходимое число внутренних и внешних связей ПЛИС, что при прочих равных условиях позволяет улучшить характеристики использования ресурсов ПЛИС.

Наличие в составе ПЛИС блоков памяти дает возможность для ускорения вычисления функциональных зависимостей использовать таблицы функций. Известны методы неавтономного воспроизведения функций с использованием таблиц для симметричных систем счисления с цифрами {-m,…,-1,0,1,…,m} [3]. Однако наличие цифр с отрицательными знаками приводит к расширению разрядной сетки для представления промежу-

точных результатов и к увеличению объема аппаратуры, причем как для устройства воспроизведения функций, так и для других устройств, работающих совместно с данным устройством для неавтономного выполнения цепочки операций, зависимых по данным [4]. Устранение указанных недостатков является актуальной задачей, решение которой позволит повысить эффективность неавтономных вычислений.

Ниже предлагается таблично-алгоритмический метод, который обеспечивает воспроизведение функций в смещенных системах счисления с различными основаниями.

Обоснование метода

Пусть функция $Y^{'} = f(X)$ задана в первом квадранте и является непрерывной. Функция может иметь экстремумы в области определения. Для определенности будем считать, что аргумент и функция представлены в избыточной смещенной системе счисления в виде:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i k^{-i}, \; Y^{'} = \sum_{i=1}^{n} y_i k^{-i}, \tag{1}$$

где $x_i, y_i \in \{\overline{0, m}\}$ – цифры; k – основание системы счисления. Соотношение $k \le m$ определяет избыточность системы.

Учитывая, что цифры результата формируются после обработки входных данных, то есть с запаздыванием, будем рассматривать функцию $Y = k^{-p} f(X)$. Здесь p – задержка в числе шагов формирования разрядов результата относительно ввода соответствующих разрядов аргумента.

Естественно, что для получения n разрядов после запятой функции $Y^{'}$ необходимо сформировать $m = n + p$ разрядов функции Y.

Значение функции, зависящее только от i старших разрядов аргумента, обозначим

$$Y_i = k^{-p} f(X_i), \tag{2}$$

где X_i – код аргумента, представленный i старшими разрядами.

Если на каждом шаге вычислений значение Y_i выбирать из условия

$$Y_i \le k^{-p} f(X_i) < Y_i + k^{-i}, \tag{3}$$

то на n-м шаге погрешность вычисления будет меньше k^{-n}.

Введя обозначение

$$R_i = k^{-p+1} f(X_i) - Y_i k^{-i}, \tag{4}$$

условие (3) можно записать в виде

$$0 \le R_i < 1. \tag{5}$$

С учетом (2) и (4) можно заключить, что перед началом вычислений $(i = 0)$ условие (5) выполняется. Предположим, что оно выполняется на i-м шаге. Определим, как обеспечить выполнение на следующем шаге условия

$$0 \le R_{i+1} < 1. \tag{6}$$

Для $(i+1)$-го шага с учетом (1) и (4) можно записать

$$R_{i+1} = k^{-p+i+1} f(X_i + x_{i+1} k^{-i-1}) - (Y + y_{i+1} k^{-i-1}) k^{i+1}. \tag{7}$$

Значение функции $f(X_i + x_{i+1} k^{-i-1})$ представим в виде $f(X_i) + \Delta_{i+1} k^{-i-1}$, то есть через значение функции на предыдущем шаге и приращение, отнесенное к разряду с весом k^{-i-1}. Тогда (7) преобразуется к виду

$$R_{i+1} = kR_i + k^{-p} \Delta_{i+1} - y_{i+1}. \tag{8}$$

Введя обозначение

$$H_{i+1} = kR_i + k^{-p}\Delta_{i+1}, \qquad (9)$$

условие (6) с учетом (8) запишем как

$$0 \le H_{i+1} < 1 + y_{i+1}. \qquad (10)$$

Левое соотношение в (10) выполняется, поскольку функция рассматривается в первом квадранте. Для выполнения правого неравенства необходимо обеспечить выполнение соотношения

$$k^{-p} \le \frac{m-k+1}{\Delta_{\max}}, \qquad (11)$$

которое получено с учетом (5) и (9).

Выражение (11) дает возможность определить значение задержки p, если известно максимальное значение приращения функции $\Delta_{\max}$ в области ее определения, или определить диапазон изменения цифр избыточной системы, то есть максимальное значение m при заданном значении p.

Таким образом, подбором значений p и m можно обеспечить выполнение условия (3) на каждом шаге вычисления функции, что гарантирует получение результата с заданной погрешностью.

Несложный анализ формулы (11) показывает, что система счисления обязательно должна быть избыточной ($m \ge k$), а задержка формирования разрядов результата не может быть меньше единицы. Заметим, что увеличение диапазона изменения значений цифр нежелательно, поскольку это приводит к увеличению разрядности шины для передачи цифр между устройствами.

Формирование таблицы приращений

Когда формирование приращений функции на каждом шаге нельзя вычислить аналитическим путем или это приводит к большим затратам времени, целесообразно использовать таблицу приращений, хранящуюся в памяти.

Таблица формируется следующим образом.

1. Строится ярусно-параллельный граф перехода значений аргумента, состоящий из $n+1$ яруса (включая 0-й). Каждая вершина графа i-го яруса соединяется дугами с $m+1$ вершиной $(i+1)$-го яруса в соответствии со значениями цифр аргумента $x_i \in \{\overline{0,m}\}$, которые приписываются указанным дугам. Каждая вершина имеет обозначение G_j^i, где $i \in (\overline{0,n})$ – номер яруса, а $j \in \{\overline{0,k^i-1}\}$ – номер вершины на i-м ярусе.

2. Каждой вершине n-го яруса присваивается вес $G_j^n = k^n Y'(X_n)$.

3. Для ярусов с номерами $i < n$ веса вершин определяются по формулам

$$G_j^i = \mathrm{ent}\left[\frac{\min(G_{j\cdot(m+1)+r}^{i+1} \mid r = 0,1,\ldots,m)}{k}\right],\ i = (n-1),(n-2),\ldots,0.$$

4. Для каждой дуги графа, соединяющей вершину G_j^i с вершиной G_q^{i+1}, определяется приращение

$$\Delta(G_j^i, G_q^{i+1}) = G_q^{i+1} - kG_j^i.$$

Приращениям i-го яруса придается вес k^{-i}.

Покажем, что сумма всех приращений, принадлежащих дугам каждого пути от начальной вершины до каждой конечной, равна значению функции для соответствующего значения аргумента в избыточном представлении.

Пусть путь проходит через вершины G_0^0, G_a^1, $G_b^2,...,G_c^{n-1},G_d^n$. Тогда сумму S приращений с учетом их весов можно записать в виде

$$S=(G_a^1-kG_0^0)k^{-1}+(G_b^2-kG_a^1)k^{-2}+\dots+(G_d^n-kG_c^{n-1})k^{-n}.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $G_0^0=0$, получим $S=G_d^n k^{-n}=Y'(X_n)$, то есть сумма приращений дает действительное значение функции для заданного значения аргумента.

Адрес приращения в таблице однозначно определяется дугой графа, а дуга, в свою очередь, определяется совокупностью верхнего и нижнего индексов вершины G_j^i, для которой дуга является входящей.

Алгоритм и пример вычисления функции

Для аппаратной реализации целесообразно использовать основание системы, равное 2^g $(g=1,2,3...)$. В этом случае могут использоваться обычные двоичные аппаратные компоненты (сумматоры, регистры и т.д.), а умножение на величину основания заменяется сдвигом.

Полученные табличные значения приращений могут превышать значение максимально допустимой цифры m избыточной системы счисления. Поэтому алгоритм вычислений предусматривает преобразование суммы приращений в последовательность цифр $y_i \in \{\overline{0,m}\}$.

Процесс вычисления функции на каждом i-м шаге определяется формулами (8) и (9).

В соответствии с формулой (9) находится H_i. Целая часть этой величины является очередной цифрой результата, то есть $y_i=\mathrm{ent}\,H_i$, а сдвинутая влево на один разряд дробная часть используется на следующем шаге в качестве R_i. Начальным является значение $R_0=0$.

Пусть необходимо вычислить непрерывную функцию $Y'=f(X)$, заданную в первом квадранте, с использованием смещенной избыточной системы счисления с основанием $k=4$ и цифрами $x_i, y_i \in \{\overline{0,4}\}$. Для представления аргумента ограничимся $n=3$ разрядами.

Полный граф в данном случае имеет 5 вершин на 1-м ярусе, 25 вершин на 2-м ярусе и 125 вершин на 3-м ярусе. Для примера рассмотрим фрагмент графа, который определяется частью таблицы значений (табл. 1).

Таблица 1 – Фрагмент таблицы задания функции

Значение аргумента		Значение функции	
$k=2$	$k=4$	$k=2$	$k=4$
0,110000	0,234	0,111111	0,333
0,101111	0,233	0,111000	0,320
0,101110	0,232	0,110000	0,300
0,101101	0,231	0,111011	0,323
0,101100	0,230	0,111100	0,330

На рис. 1 показан фрагмент графа, полученный в соответствии с приведенной выше процедурой формирования таблицы приращений. Нижняя дуга каждого разветвления соответствует цифре аргумента $x_i=0$, а верхняя – $x_i=4$ (чтобы не загромождать рисунок, цифры аргумента приписаны только двум дугам первого яруса). Приращения, соответствующие дугам, показаны жирным шрифтом.

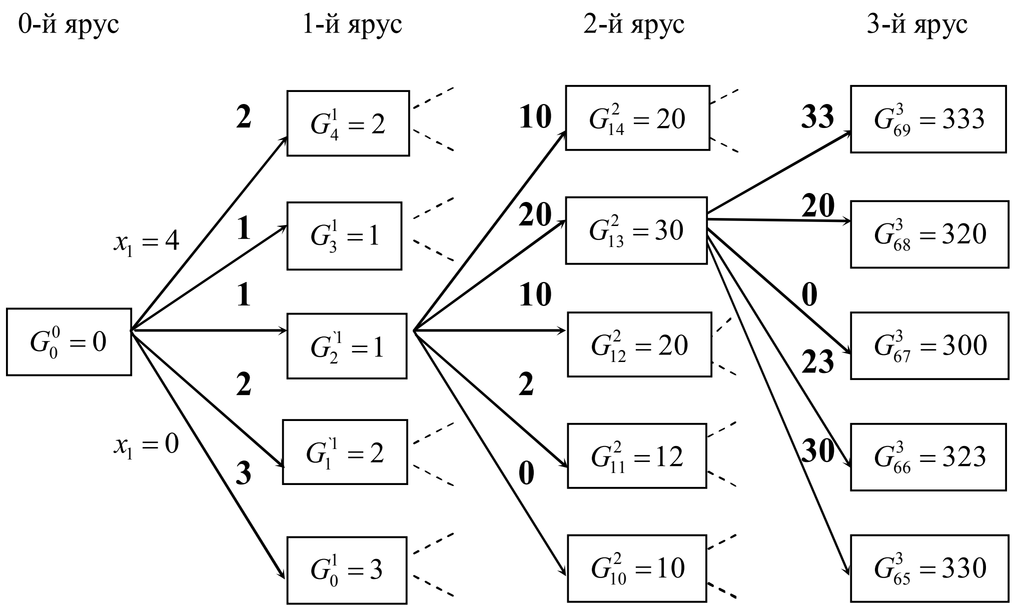


Рисунок 1 – Фрагмент графа

Для полученного фрагмента графа максимальное приращение в десятичном представлении равно $\Delta_{\max} = 15$. По формуле (11) определяем минимальную задержку формирования цифр результата $p = 2$. Для получения значения функции $Y' = f(X)$ необходимо выполнить $p + n = 5$ шагов.

Для значения аргумента $X = 234$ процесс вычислений иллюстрируется табл. 2.

Таблица 2 – Состояния переменных

i	x_i	Δ_i	$H_i(k=2)$	$H_i(k=4)$	y_i	Микрооперация
0	–	–	00,0000	0,00	–	–
1	2	1	+<u>00,0001</u> **00**,0001 00,0100	+<u>0,01</u> **0**,01 0,10	0	суммирование сдвиг
2	3	20	+<u>00,1000</u> **00**,1100 11,0000	+<u>0,20</u> **0**,30 3,00	0	суммирование сдвиг
3	4	33	+<u>00,1111</u> **11**,1111 11,1100	+<u>0,33</u> **3**,33 3,30	3	суммирование сдвиг
4	–	–	+<u>00,0000</u> **11**,1100 11,0000	+<u>0,00</u> **3**,30 3,00	3	суммирование сдвиг
5	–	–	+<u>00,0000</u> **11**,0000 00,0000	+<u>0,00</u> **3**,00 0,00	3	суммирование сдвиг

Целая часть H_i, показанная жирным шрифтом, является очередной цифрой результата. После выполнения 5 шагов получено 5 дробных разрядов функции $Y = k^{-2} f(X) = 0{,}00333$. Начиная с третьего шага формируются разряды функции $Y' = f(X) = 0{,}333$. Полученный результат соответствует указанному в табл. 1 значению функции для заданного аргумента.

Заключение

Предложенный таблично-алгоритмический метод воспроизведения функций позволяет совмещать процессы поразрядного ввода аргумента и поразрядного формирования результата в смещенной избыточной системе счисления. Это дает возможность использовать метод для неавтономного выполнения зависимых операций в режиме совмещения, когда другие операции в цепочке выполняются также в смещенной системе счисления.

По сравнению с методами, использующими симметричные системы счисления, в данном случае упрощается аппаратная реализация и уменьшается время вычислений, поскольку нет необходимости работать с отрицательными приращениями. На практике широко применяются вычислительные методы, например, численного интегрирования, цифровой обработки сигналов, вычисления полиномов, которые в ряде случаев могут быть реализованы в смещенных системах счисления.

Благодаря поразрядной передаче информации уменьшается число связей между компонентами системы по сравнению с использованием методов параллельной арифметики. Это особенно важно при реализации систем на ПЛИС, поскольку повышает надежность систем и более экономично использует ресурсы интегральных схем.

Литература

1. Жабин В.И. Некоторые машинные методы вычисления рациональных функций многих аргументов / В.И. Жабин, В.И. Корнейчук, В.П. Тарасенко // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 12. – С. 145-154.
2. Жабин В.И. Методы быстрого неавтономного воспроизведения функций / В.И. Жабин, В.И. Корнейчук, В.П. Тарасенко // Управляющие системы и машины. – 1977. – № 3. – С. 96-101.
3. Жабин В.И. Построение быстродействующих специализированных вычислителей для реализации многоместных выражений / В.И. Жабин, В.И. Корнейчук, В.П. Тарасенко // Автоматика и вычислительная техника. – 1981. – № 6. – С. 18-22.
4. Дичка И.А. Совмещение зависимых операций на уровне обработки разрядов операндов / И.А. Дичка, В.В. Жабина // Искусственный интеллект. – 2008. – № 3. – С. 649-654.

І.А. Дичка, В.В. Жабіна

Метод обчислення функцій у неавтономному режимі

Запропоновано таблично-алгоритмічний метод обчислення функцій з використанням зміщених надлишкових систем числення, що дозволяє суміщення процесів порозрядного введення аргументу і порозрядного формування результату. Це дає можливість використання методу для неавтономного виконання залежних за даними операцій у режимі суміщення. Показано залежність часу обчислень від параметрів систем числення.

I.A. Dychka, V.V. Zhabina

Method of Function Calculation in On-line Mode

Tabular and algorithmic method for function calculation using shifted redundant numerical systems is proposed. It permits to combine processes of digit-by-digit argument input and digit-by-digit result formation. It enables to use the method for on-line realization of data-dependent operations in on-line mode. The dependence of the time of calculations on numerical system parameters is shown.

Статья поступила в редакцию 07.07.2009.